数理解析研究所講究録
598巻 1986年 204-218

Exponential group の orbit method について

九大・理　藤原英徳
(Hidenori FUJIWARA)

Kirillov の着想になる "orbit method" はいわば Mackey 理論の適用による見事な formulations であり、後の可解リー群の表現論研究において統一的な手法を提供する事により、その有効性を証明し続けてきた。可解リー群の構造論的欠陥は "orbit method" の枠組においても数学的帰納法を標準的証明法として採用させ、詳しい解析をする為の道具不足、情報不足をもたらしている事は否めない。にもかかわらず "orbit method" は各国の研究者達にさまざまな話題を提供し、今だにその活力を失ってはいない。ここでは巾零リー群、exponential group に対し幾つかの話題を拾ってみよう。

§1. Dual 位相について

G をリー環 $\mathfrak{g}$ をもつ exponential group, i.e. 連結、単連結なリー群で exponential map $\exp : \mathfrak{g} \to G$ が全射なるものとする。この時 exponential map は $\mathfrak{g}$ から G 上への diffeomorphism となり、$\mathfrak{g}$ は可解である。以下 $G = \exp \mathfrak{g}$ なる記法を用いる。

例の如く "orbit method" の setting から始めよう。$\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の

dual space とし、$f \in \mathfrak{g}^*$ に対し $B_f(X, Y) \equiv f([X, Y])$ なる $\mathfrak{g}$ 上の歪対称双一次形式を導入し、その radical を $\mathfrak{g}(f) \equiv \{X \in \mathfrak{g};$ $B_f(X, Y) = 0$ for ${}^\forall Y \in \mathfrak{g}\}$ とおく。$\mathfrak{g}(f)$ は G の coadjoint 表現に関する f の stabilizer のリー環に他ならない。$S(f, \mathfrak{g}) \equiv \{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}:$ 部分リー環；$\mathfrak{h}$ は B_f に関し totally isotropic subspace$\}$、$M(f, \mathfrak{g}) \equiv$ $\{\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$；$\mathfrak{h}$ は B_f に関し maximal totally isotropic subspace$\}$ $=$ $\{\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$；$2\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f)\}$ とおき、$M(f, \mathfrak{g})$ の要素を f における $\mathfrak{g}$ の real polarization と呼ぶ。

さて $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ に対し、対応する analytic subgroup $H =$ $\exp \mathfrak{h}$ の unitary character χ_f, $\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1}f(X)}$ $(X \in \mathfrak{h})$、からの誘導表現 $\tau(f, \mathfrak{h}) = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ を構成しよう。このようにある閉部分群の unitary character から誘導して得られる表現は単項表現と呼ばれる。この時 Mackey 理論より G 自身単項である、i.e. 任意の既約ユニタリ表現はある $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ から得られる $\tau(f, \mathfrak{h})$ に同値である (cf. [19])。

そこで $f \in \mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ として $\tau(f, \mathfrak{h})$ の形の表現がいつ既約になるかを調べると、その判定条件としていわゆる Pukanszky condition が知られている：

$$\tau(f, \mathfrak{h}) : \text{既約} \iff \mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g}) \equiv \{\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})\ ;\ H.f = f + \mathfrak{h}^\perp\}$$

ここに $\mathfrak{h}^\perp = \{\ell \in \mathfrak{g}^*;\ \ell | \mathfrak{h} = 0\}$.

次に任意の $f \in \mathfrak{g}^*$ において $I(f, \mathfrak{g}) \neq \phi$、2 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$

とすると $\tau(f, \mathfrak{h}_1) \simeq \tau(f, \mathfrak{h}_2)$ が示され、$\mathfrak{g}^* \ni f \mapsto \theta(f) = \tau(f, \mathfrak{h}) \in \hat{G}$ なる surjection が $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$ を媒介にして定義される。但し G の unitary dual を $\hat{G}$ で表わし、その要素をしばしば代表元と同一視する。

更に $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ として $\theta(f_1) = \theta(f_2) \Leftrightarrow G.f_1 = G.f_2$ より θ は quotient に移って coadjoint 表現による orbit space $\mathfrak{g}^*/G$ から $\hat{G}$ 上への bijection $\bar{\theta}$ を与える。

さてこの Kirillov-Bernat 対応 $\bar{\theta}$ は集合論的意味以上の情報を含んでいる。実際 $\hat{G}$ は自然な位相として Fell topology を備えている。即ち任意の部分集合 $S \subset \hat{G}$ に対し、その閉包を、

$\pi \in \bar{S} \Leftrightarrow \pi$ に associate した任意の positive definit function $G \ni g \mapsto (\pi(g)\xi, \xi)$ ($\xi \in \mathcal{H}_\pi$: π の空間) が S の要素に associate した positive definit function で compact set 上一様に近似できる。

で与えるわけである。他方 orbit space $\mathfrak{g}^*/G$ は自然な位相として $\mathfrak{g}^*$ の商位相を備えている。この時 $\bar{\theta} : \mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$ は連続 [18] であり、$\hat{G}$ は analytic Borel space 故 (cf. [2])、Borel isomorphism である。即ち orbit space $\mathfrak{g}^*/G$ は Borel structure もこめて $\hat{G}$ の実現を与える。

問 1. $\bar{\theta}$ は homeomorphism か…即ち orbit space $\mathfrak{g}^*/G$ は topology もこめて $\hat{G}$ の実現を与えているか?

この問は Kirillov による "orbit method" 創始以来の open problem であったといってもよく Kirillov、Pukanszky 以後最初の結果は Brown [7] による。

定理 1. G が巾零の時 $\bar{\theta}$ は homeomorphism.

Brown の証明は非常に tricky であり exponential への一般化は困難である。そこで Joy [15] は Fell の結果を用いて定理 1 のより自然な別証明を与えたが、彼の証明も、任意の既約表現が正規部分群の表現から誘導されるという、巾零群に特有の性質を本質的に用いている。

Exponential group $G = \exp\mathfrak{g}$ に対しては、現在のところ次の結果が最良であろう：$f \in \mathfrak{g}^*$ に対し $m(f) \equiv \mathfrak{g}(f) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の降中心列

$$m^0(f) = m(f)\ , \quad m^1(f) = [m(f), m^0(f)], \ \cdots, \ m^k(f) = [m(f), m^{k-1}(f)], \cdots$$

を考える。

定理 2 (Boidol [5]). 任意の $f \in \mathfrak{g}^*$ において $f(\bigcap_{k=0}^{\infty} m^k(f)) = 0$ なら $\bar{\theta}$ は homeomorphism である。

Note 1. basis (T, X, Y, Z) ; $[T, X] = X$, $[T, Y] = -Y$, $[X, Y] = Z$ で与えられる 4 次元の完全可解リー環 $\mathfrak{g}$ を考えると、対応す

る連結、単連結な $G=\exp\mathfrak{g}$ は定理2の仮定をみたさない最も簡単な例. この場合 infinitesimal character の Fell topology に関する連続性を用いて $\bar{\theta}$ がやはり homeomorphism なる事が Rosenberg により示され、同様の手法で Boidol は $\dim G \leq 5$ なる exponential group G に対し $\bar{\theta}$ は常に homeomorphism となる事を証明している.

ついでに筆者[11]の部分的結果も挙げておこう.

定理3. $\bar{\theta}$ は $\mathfrak{g}^*/G$ のある open dense subset O_1 から $\hat{G}$ の open dense subset O_2 上への homeomorphism を与える.

Boidol、筆者双方に超え難く現われている困難さは結局 Joy の場合に用いられた正規部分群からの誘導という特徴をいかに克服するかにつらなっているように思われる. 又上記 Note 1 が示す如く universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ の利用は群によっては有効であるが、例えば open coadjoint orbit を持つような G の場合、$Z(\mathfrak{g})$ は trivial になるから少し拡げてやる必要がある. $\bar{\theta}^{-1}$ を具体的に構成してその連続性を示そうとする Pedersen の最近の試みはこの線に沿ったものと思われる. 更に群や dual の概念を拡張し、そこで対応する主張を確立した後再び制限して求める主張を示そうというのが Ludwig の variable groupの概念である。いずれにしても考えている位相はHausdorffからは程遠く、そう簡単なものではない。例えば$\bar{\theta}^{-1}$はtrivial表現の所で連続であろうか？

次にもう少し弱い形の問題を考えよう。Gのユニタリ表現πに対しそのHilbert spaceを$\mathcal{H}_\pi$ (separable仮定)とし、又$L^1(G)$はGの左Haar測度dgに関するものとする。任意の$\Phi \in L^1(G)$に対し$\pi(\Phi) = \int_G \Phi(g)\pi(g)\,dg$が$\mathcal{H}_\pi$におけるcompact operatorなる時、$\pi$をCCR表現といい、任意の既約ユニタリ表現がCCRである時、群GはCCRであるといわれる。Fell topologyの言葉でCCRを特徴づけると、既約ユニタリ表現πがCCR $\Leftrightarrow$ $\{\pi\} \subset \hat{G}$が閉集合。従って連結、単連結巾零リー群GがCCRであるという事実は、定理1により、Gの任意のcoadjoint orbitが閉集合であるという事実と対応している。

一般にexponential group $G = \exp \mathfrak{g}$はCCRとは限らず、又そのcoadjoint表現のorbitは局所閉集合ではあるが閉集合とは限らない。Kirillov - Bernat map $\bar{\theta} : \mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$の連続性はわかっているので、$\pi \in \hat{G}$がCCRなら対応するorbit $\bar{\theta}^{-1}(\pi)$はclosed orbitであるが、

問2 (Moore's conjecture). closed orbit $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$に対し$\bar{\theta}(\Omega) \in \hat{G}$はCCRか？

Note 2. $\mathfrak{g}$: algebraic の時 Pukanszky により確立されて以来長い間 open problem であったこの問題も最近 Charbonnel により肯定的に解かれたとも聞く…彼が証明したのは closed orbit と tempered orbit (i.e. その上の canonical measure が tempered measure を与えるもの) の一致か？

より一般に連結、単連結I型可解リー群に対する Auslander - Kostant の unitary dual の構成 [1] は dual topology に関しいかなる情報を与えているであろうか？

§2. 単項表現の分解

リー群 G (σ-compact 仮定) のユニタリ表現 π の空間 $\mathcal{H}_\pi$ において C^∞-vectors のなす dense subspace $\mathcal{H}_\pi^\infty$ に通常の位相を与えた Fréchet space を考える。$\mathcal{H}_\pi^\infty$ の anti-dual を $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ で表わしその要素を π の generalized vector と呼ぼう。$\mathcal{H}_\pi^\infty$ は $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ の anti-dual と同一視され、$\langle a, b\rangle$ ($a \in \mathcal{H}_\pi^{\pm\infty}$、$b \in \mathcal{H}_\pi^{\mp\infty}$) で a の b における値を表わす。この時任意の $\Phi \in C_c^\infty(G)$ に対し $\pi(\Phi)\mathcal{H}_\pi^{-\infty} \subset \mathcal{H}_\pi^\infty$ が成り立つ事を注意しておこう。G の閉部分群 K とその character $\chi: K \to \mathbb{C}^*$ に対し

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{K,\chi} = \{a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty};\ \pi(k)a = \chi(k)a \quad \text{for } \forall k \in K\}$$

とおき、$\chi \equiv 1$ の時 $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{K,\chi}$ の代わりに $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^H$ と書く (cf. [3])。

$G = \exp \mathfrak{g}$ を連結、単連結な巾零リー群とし、$f \in \mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h} \in M($

f, $\mathfrak{h}$) から出発して $\pi = \tau(f, \mathfrak{h}) \in \hat{G}$ を構成しよう。π の既約性は巾零の特殊性 $I(f, \mathfrak{g}) = M(f, \mathfrak{g})$ よりいえる。$\mathfrak{g}$ において部分リー環 $\mathfrak{h}$ に supplementary な基底 $\{X_1, \cdots X_m\}$ を考える：$\mathfrak{g} = \sum_{j=1}^{m} \oplus \mathbb{R}X_j \oplus \mathfrak{h}$.
各 $\mathfrak{g}_k = \sum_{j>k}^{m} \oplus \mathbb{R}X_j \oplus \mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分リー環なる時 $\{X_1, \ldots, X_m\}$ は adapted supplementary basis と呼ばれる。このような basis を用いて π を空間 $L^2(\mathbb{R}^m)$ に実現する時巾零リー群の "orbit method" において非常に有用な次の定理が得られる。

定理 4 (Kirillov [14], Corwin-Greenleaf-Penney [8]). 位相もこめて $\mathcal{H}_\pi^\infty$ は急減少函数のなす Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ に一致する。

従ってこの定理における状況では $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ は tempered distribution の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ に conjugate である。

さて $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ から構成された単項表現 $\tau(f, \mathfrak{h})$ の既約分解はどうなるであろうか、即ち

$$\tau(f, \mathfrak{h}) = \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\, \pi \, d\nu(\pi)$$

を $\tau(f, \mathfrak{h})$ の canonical central decomposition とする時、測度 ν の class 及び multiplicity $m(\pi)$ を求めたい。G が巾零の時この問題は完全に解決されており、

定理 5 (Corwin-Greenleaf-Grélaud [9]). 測度 ν の class は $f + \mathfrak{h}^\perp$

上の Lebesgue measure class の Kirillov map θ による image であり、他方 multiplicity $m(\pi)$ は $(f+\mathfrak{h}^{\perp})\cap\theta^{-1}(\pi)$ に含まれる H-orbit の数である。但し以前同様 $H=\exp\mathfrak{h}$.

exponential case では部分的な結果しか知られていないが、Pukanszky condition が示唆するように、やはり $\theta^{-1}(\pi)\cap(f+\mathfrak{h}^{\perp})\neq\phi$ なる $\pi\in\hat{G}$ のみがこの分解に関与してくる事がわかっている。

問 3. 定理 5 は exponential case でも成立するであろうか？

$\mathfrak{h}\in S(f,\mathfrak{g})$ が ideal の場合には問 3 の答は肯定的であり、しかもこの場合 multiplicity $m(\pi)$ は一様に 1 又は $+\infty$ である。これらの研究における multiplicity 決定の出発点になったのは real polarization に対する次の結果であろうと思われる。$G=\exp\mathfrak{g}$: exponential group, $f\in\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}\in M(f,\mathfrak{g})$, $H=\exp\mathfrak{h}$ とする。$f+\mathfrak{h}^{\perp}$ とその開集合で交わる coadjoint orbit の集合を $U(f,\mathfrak{h})$ で表わし、$\Omega\in U(f,\mathfrak{h})$ に対し $(f+\mathfrak{h}^{\perp})\cap\Omega$ に含まれる H-orbit の数を $m(f,\mathfrak{h},\Omega)$ とおく。

定理 6 (Vergne cf. [4]). 任意の $\Omega\in U(f,\mathfrak{h})$ に対し、$m(f,\mathfrak{h},\Omega)$ は有限で $\tau(f,\mathfrak{h})\simeq\sum_{\Omega\in U(f,\mathfrak{h})} m(f,\mathfrak{h},\Omega)\,\bar{\theta}(\Omega)$.

multiplicity のわかっている今一つの場合は symmetric space に

付随した場合である。$\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ を G の involution、σ (resp. $d\sigma$) の fixed points set を H (resp. $\mathfrak{h}$) とし、$H = \exp \mathfrak{h}$ の trivial 表現から誘導された準正則表現 $\tau(0, \mathfrak{h}) = \mathrm{ind}_H^G \mathbb{1}$ を考えよう。

定理 7 (Benoist [3])．任意の $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ に対して $\mathfrak{h}^\perp \cap \Omega$ は空集合もしくは唯一つの H-orbit であり、それに応じて quasi regular な表現 $\tau(0, \mathfrak{h})$ は multiplicity free である。

ここで multiplicity と関連して一種の reciprocity を考えてみよう。以下しばらく $G = \exp \mathfrak{g}$ は連結、単連結巾零リー群とし、π をその既約ユニタリ表現とする。

定理 8 (Howe [13])．$f \in \mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g}) = M(f, \mathfrak{g})$ とする。この時

$$\dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \pi \not\simeq \tau(f, \mathfrak{h}), \\ 1 & \text{if} \quad \pi \simeq \tau(f, \mathfrak{h}). \end{cases}$$

但し以前同様 $H = \exp \mathfrak{h}$、$\chi_f(\exp X) = e^{\sqrt{-1} f(X)}$ $(X \in \mathfrak{h})$.

又定理 7 の situation を巾零リー群で考える時、やはりこの type の reciprocity の成立を見る。そこにおける記号を用いる事にして、

定理 9 (Benoist [3]).

$$\dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^H = \begin{cases} 0 & \text{if } \theta^{-1}(\pi) \cap \mathfrak{h}^\perp = \phi. \\ 1 & \text{if } \theta^{-1}(\pi) \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \phi. \end{cases}$$

問 4. 定理 5 の状況においてもこの reciprocity は成り立つであろうか…つまり $\tau(f, \mathfrak{h})$ の分解における π の multiplicity $m(\pi)$ は $\dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f}$ にとれるであろうか？

$\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ が ideal である場合問 4 は容易にたしかめられるが今の所一般には $\dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f} \geqq m(\pi)$ しかわからない。

§ 3. Plancherel formula

リー群 G 及びその閉部分群 H の module をそれぞれ Δ_G, Δ_H で表わし、H 上 $\Delta_{G/H} = \Delta_H / \Delta_G$ とおく。今 H の unitary character χ から誘導された単項表現 $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi$ に関し特別な anti-linear form

$$a_\tau : \mathcal{H}_\tau^\infty \ni \Phi \longmapsto \overline{\Phi(e)} \in \mathbb{C} \quad (e : G \text{の単位元})$$

を考えると、$\mathcal{H}_\tau^\infty \subset C^\infty(G)$ より a_τ は意味を持ち、$a_\tau \in (\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H, \Delta_{G/H}^{1/2} \chi}$.

G を I 型とする。τ の canonical central decomposition に応じて a_τ なる generalized vector も分解される [17].

以下 $G = \exp \mathfrak{g}$ を連結、単連結巾零リー群、$f \in \mathfrak{g}^*$、$\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{h})$ とし、以前同様単項表現 $\tau(f, \mathfrak{h}) = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ とその canonical central decomposition $\qquad \tau(f,\mathfrak{h}) = \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi\, d\nu(\pi)$

を考え、$\tau = \tau(f,\mathfrak{h})$ は finite multiplicity、$m(\pi) < +\infty$ for $\forall \pi \in \hat{G}$、を持つと仮定しよう。さてこの分解に応じて generalized vector $a_\tau \in (\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H,\chi_f}$ が分解される (cf. also [6])：$a_\pi^k \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f}$ $(1 \le k \le m(\pi))$ が存在して

$$a_\tau = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \oplus\, a_\pi^k \, d\nu(\pi).$$

従って任意の $\Phi \in C_c^\infty(G)$ に対し、

$$\langle \tau(\Phi) a_\tau, a_\tau \rangle = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\Phi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle \, d\nu(\pi)$$

即ち $\qquad \tilde{\Phi}(e) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\Phi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle \, d\nu(\pi),$ $\qquad (*)$

ここで $\tilde{\Phi}$ は H 上適当に normalize された (Φ に依らない) Haar 測度 dh を用いて $\qquad \tilde{\Phi}(g) = \int_H \Phi(gh)\chi_f(h)\, dh \quad (g \in G)$

で与えられる $\mathcal{H}_\tau^\infty$ の元である。

公式 $(*)$ をみたす generalized vector $a_\pi^k \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f}$ を具体的に求めてみよう。任意の $\pi \in \hat{G}$ を $\ell \in \theta^{-1}(\pi)$ における real polarization $\mathfrak{b} \in I(\ell, \mathfrak{g})$ を用いての単項表現として実現しよう：$B = \exp \mathfrak{b}$、$\chi_\ell(\exp X) = e^{\sqrt{-1}\ell(X)}$ $(X \in \mathfrak{b})$、$\pi = \mathrm{ind}_B^G \chi_\ell$. 定理 5 より $(f + \mathfrak{h}^\perp) \cap \theta^{-1}(\pi)$ に含まれる H-orbits を $C_1, \dots, C_{m(\pi)}$ とし、$g_k.\ell \in C_k$ なる g_k $(1 \le k \le m(\pi))$ なる $g_k \in G$ をとる。

定理 10 ([12]). 等質空間 $H/H \cap g_k B g_k^{-1}$ $(1 \le k \le m(\pi))$ 上の不変測度 $d_k \dot{h}$ を用い

$$a_\pi^k : \mathcal{H}_\pi^\infty \ni \Phi \mapsto \int_{H/H\cap g_k B g_k^{-1}} \overline{\Phi(h g_k)\chi_f(h)}\, d_k \dot{h} \quad (1 \leq k \leq m(\pi))$$

とおく。これら a_π^k、$1 \leq k \leq m(\pi)$、は $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f}$ に属する一次独立な generalized vectors で、種々の測度を適当に normalize する時、公式 (*) をみたす。

References

[1] L. Auslander and B. Kostant, Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent. math. 14 (1971), 255-354.

[2] L. Auslander and C. C. Moore, Unitary representations of solvable Lie groups, Mem. A.M.S. No 62, 1966.

[3] Y. Benoist, Espaces symétriques exponentiels, Thèse 3^e cycle, Univ. Paris VII, 1983.

[4] P. Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.

[5] J. Boidol, *-regularity of exponential Lie groups, Invent. math. 56 (1980), 231-238.

[6] P. Bonnet, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, J. Func. Anal. 55 (1984), 220-246.

[7] I. Brown, Dual topology of a nilpotent Lie group, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 6 (1973), 407-411.

[8] L. Corwin, F. P. Greenleaf and R. Penney, A general character formula for irreducible projections on L^2 of a nilmanifold, Math. Ann. 225 (1977), 21-32.

[9] L. Corwin, F. P. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, to appear.

[10] J. M. G. Fell, The dual space of C^*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960), 365-403.

[11] H. Fujiwara, Sur le dual d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, J. Math. Soc. Japan 36 (1984), 629-636.

[12] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, to appear.

[13] R. Howe, On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities, Pacific J. Math. 73 (1977), 329-364.

[14] A. A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Usp. Mat. Nauk 17 (1962), 57-110.

[15] K. Joy, A description of the topology on the dual space of a nilpotent Lie group, Pacific J. Math. 112 (1984), 135-139.

[16] C. C. Moore, Representations of solvable and nilpotent groups and harmonic analysis on nil and solvmanifolds, Proc. Symp. Pure

Math. 26 (1973), 3-44.

[17] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, J. Func. Anal. 18 (1975), 177-190.

[18] L. Pukanszky, On the unitary representations of exponential groups, J. Func. Anal. 2 (1968), 73-113.

[19] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation des groupes de Lie de type (E), Math. J. Okayama Univ., 7 (1957), 151-161.